ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1985

Toutes options

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 14 mai 1985 de 8h à 12h

Notations : E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

P désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n, on note e_n l'application $e_n : \begin{matrix}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n\end{matrix}$ et P_n le sous espace vectoriel de P engendré par la famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

Enfin, si X est une variable aléatoire réelle, E(X) désigne son espérance mathématique et V(X) sa variance.

A toute fonction f, élément de E, on associe la fonction ϕ définie, pour tout x réel, par : $\phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

Le problème propose l'étude de quelques propriétés de l'application $f \longmapsto \phi$.

Les parties III, IV, V, indépendantes entre elles, utilisent des résultats de la partie II, que l'on pourra, éventuellement, admettre.

I - Etude de trois exemples

Déterminer les fonctions ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 associées respectivement à f_1, f_2, f_3 définies par :

① $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = x \cos(2\pi x)$

② $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 4x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 4(1-x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

Tracer la courbe représentative de ϕ_2. ϕ_2 est-elle indéfiniment dérivable ?

③ $f_3(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ \ell n\, x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,[\phi_3(x) - f_3(x)]$

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des coordonnées du point de la courbe représentative de ϕ_3, à tangente parallèle à l'axe des abscisses. Tracer les courbes représentatives de f_3 et ϕ_3 dans un même repère.

II - Etude de l'application $L : \begin{matrix}E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \phi\end{matrix}$

① a) f appartenant à E, dire pourquoi ϕ est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'application $L : \begin{matrix}E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \phi\end{matrix}$ est linéaire. Est-elle surjective ?

c) Soit α un réel strictement positif. Calculer ϕ si f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(\alpha x)$
L est-elle injective ?

② a) Montrer que, si f est bornée, $\phi = L(f)$ est bornée et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si f est périodique, $\phi = L(f)$ l'est également.

c) Soient : $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $\phi = L(f)$, g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = f(a-x)$
$\gamma = L(g)$.
Trouver un lien entre γ et ϕ.
En déduire un élément de symétrie de la courbe représentative de ϕ lorsque f est paire (respectivement impaire).
Donner une condition suffisante sur f pour que ϕ soit paire (respectivement impaire).

③ a) Montrer que, si f admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) $\phi = L(f)$ possède la même limite.
Y a-t-il réciproque ? Donner un contre-exemple.

b) On suppose l'existence d'un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d'une fonction numérique ε tels que, pour $x \neq 0$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$ et $\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$ (le symbole ∞ représentant indifféremment $+\infty$ ou $-\infty$).

Montrer qu'il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera en fonction de (a, b, c) et une fonction numérique ε' tels que :

$$\phi(x) = a' x + b' + \frac{c'}{x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon'(x) = 0 .$$

III - Etude d'un exemple

$\sqrt[3]{A}$ désigne, dans ce qui suit, le nombre réel unique, éventuellement négatif, dont le cube vaut A.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)}$

(1) Etudier la fonction f (continuité, dérivabilité, variations, limites). Tracer sa courbe représentative (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

(2) Etudier la fonction $\phi = L(f)$ associée, sans chercher à l'expliciter. Donner des valeurs approchées du minimum et du maximum relatifs de ϕ (on pourra utiliser la méthode des rectangles en divisant l'intervalle d'intégration en 10 parties égales).
Tracer la courbe représentative de ϕ (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

IV - Etude des valeurs propres de L

Un nombre réel λ est dit valeur propre de L s'il existe une fonction non nulle f de E, appelée fonction propre de L associée à la valeur propre λ, telle que $L(f) = \lambda f$.

λ désignant une valeur propre de L, on note $E_\lambda = \{f \in E \ ; \ L(f) = \lambda f\}$

(1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, P_n est stable par L, ainsi que P.

b) Ecrire la matrice A_n de la restriction ℓ_n de L à P_n rapporté à la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

c) Quelles sont les valeurs propres de ℓ_n ? ℓ_n est-elle diagonalisable ?

(2) a) 0 est-il valeur propre de L ?

b) Montrer que, si $f \in E$ est une fonction propre associée à une valeur propre non nulle λ, elle est indéfiniment dérivable et que ses dérivées successives appartiennent à E_λ.

(3) a) Montrer que : $\forall \omega \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto e^{\omega x}$ est propre pour L et déterminer la valeur propre $\lambda(\omega)$ associée.

b) Etudier les variations de la fonction $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto \lambda(\omega)$

Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

c) En déduire que tout réel positif est valeur propre de L.

(4) Montrer que toute fonction propre, associée à une valeur propre supérieure à 1, est non bornée (utiliser II-2-a).

V - Cas où f, élément de E, est la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X

(1) Exprimer $\phi = L(f)$ en fonction de F fonction de répartition de l'aléa X.
Montrer que ϕ est la densité d'une variable aléatoire Y (on vérifiera en particulier, en utilisant II-3-a que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{0} \phi(t)dt$ convergent).

(2) On suppose f nulle en dehors d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$.
Calculer, pour tout entier naturel n, $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$.
En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de $E(X)$ et $V(X)$.

(3) Montrer que l'expression de $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$, obtenue à la question précédente, est toujours valable si l'on suppose uniquement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n)$ existe.